BAB VI
DERET TAYLOR DAN DERET LAURENT

22. Deret Taylor

Misal fungsi f(z) analitik pada $| z - z_0 | < R_0$ (lingkaran dengan pusat di z_0 dan jari-jari R_0). Maka untuk setiap titik z pada lingkaran itu, f(z) dapat dinyatakan sebagai :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \ldots\ldots\ldots \left(|z - z_0| < R_0\right)$$

dengan $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ldots\ldots (n = 0,1,2,\ldots)$

Atau dituliskan ,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}\left(z - z_0\right)^2 + \ldots\left(|z - z_0| < R_0\right).$$

Deret diatas disebut **<u>Deret Taylor</u>** di titik z_0 dan daerah $| z - z_0 | < R_0$ disebut **<u>daerah kekonvergenan</u>** atau **<u>keanalitikan</u>** deret. Bila f(z) fungsi entire maka daerah keanalitikan deret yaitu : $| z - z_0 | < \infty$.

Bila $z_0 = 0$, maka deret disebut **<u>Deret Mac laurin</u>** , berbentuk :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \ldots\ldots. \left(|z| < R_0\right)$$

Dalam memperderetkan atau mengekspansikan suatu fungsi, akan lebih mudah dilakukan asalkan kita sudah mempunyai perderetan dari fungsi tertentu. Caranya dengan melihat pola dasar bentuk perderetan suatu fungsi tertentu tersebut dan daerah keanalitikannya. Adapun fungsi tertentu tersebut yang seringkali digunakan adalah: fungsi eksponen $\left(f(z) = e^z\right)$ dan fungsi rasional $\left(f(z) = \dfrac{1}{1 - z}\right)$. Untuk lebih jelasnya, diberikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1
Nyatakan $f(z) = e^z$ dalam deret Mac Laurin.

Jawab :

Fungsi f(z) = e^z merupakan fungsi entire sehingga daerah keanalitikan : | z | < ∞ dan $f^{(n)}(z) = e^z \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

Oleh karena itu, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ldots\ldots\ldots (|z| < \infty)$

Contoh 2

Perderetkan dalam deret Mac Laurin, fungsi berikut :

a. $f(z) = z^2 e^{3z}$.

b. f(z) = sinh z

Jawab :

Untuk menyelesaikan perderetan kedua fungsi di atas dapat digunakan bentuk deret contoh 1 sebab daerah keanalitikannya sama .

a. Fungsi $f(z) = z^2 e^{3z}$ merupakan fungsi entire, sehingga daerah keanalitikan: | z | < ∞

Dengan mengunakan bentuk $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ldots\ldots\ldots (|z| < \infty)$. Maka di dapatkan deret :

$e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n!} \ldots\ldots (|z| < \infty)$. Oleh karena itu , didapatkan:

f(z) = $z^2 e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^{n+2}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2} z^n}{(n-2)!} \ldots\ldots\ldots (|z| < \infty)$

b. Fungsi $f(z) = \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$ merupakan fungsi entire sehingga daerah keanalitikan: | z | < ∞. Maka bentuk deret :

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty)$$

Contoh 3

Perderetkan fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ dalam deret Mac Laurin.

Jawab :

Fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ gagal analitik di z = 1, sehingga daerah keanalitikan:| z | < 1.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \rightarrow f^{(n)}(0) = n! \text{ dan } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ldots\ldots\ldots(|z| < 1).$$

Contoh 4

Perderetkan dalam deret Mac Laurin, fungsi berikut :

a. $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$

b. $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$

Jawab :

Digunakan deret (contoh 3)

a. Fungsi $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ tidak analitik di z = -1 sehingga daerah keanalitikan | z | < 1.

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \ \ldots\ldots(|z| < 1).$$

b. Fungsi $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$ tidak analitik di z = 1 dan z = -1, daerah keanalitikan: | z | < 1.

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \ \ldots\ldots\ldots(|z| < 1)$$

Contoh 5

Tentukan deret Taylor dari $f(z) = \dfrac{1}{z}$ di z = 1.

Jawab :

Fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ tidak analitik di z = 0, daerah keanalitikan | z - 1 | < 1.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \ldots\ldots\ldots(|z-1|<1)$$

Soal Latihan ____

(Nomor 1 sd 8) Gunakan bentuk deret yang sudah ada untuk menentukan perderetan fungsi berikut ke dalam deret Mc Laurin dan tentukan daerah keanalitikannya.

1. f(z) = sin z
2. f(z) = cos z
3. f(z) = cosh z
4. f(z) = ln (1 - z)
5. $f(z) = z \cosh(z^2)$
6. $f(z) = \frac{2}{3+z}$
7. $f(z) = \frac{z}{z^4+1}$
8. $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$

(Nomor 9 sd 13) Gunakan bentuk deret yang sudah ada untuk menentukan perderetan fungsi berikut ke dalam deret Taylor di pusat yang diketahui dan tentukan daerah keanalitikannya

9. f(z) = cosh z ; z = -2πi.
10. $f(z) = \frac{1}{1-z}$; z = i.
11. $f(z) = \frac{1}{1+z}$; z = -i.

12. $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$; z = i.

13. f(z) = sin z ; z = ½π

(Nomor 14 sd 17) Tentukan deret Mac Laurin dan daerah keanalitikan dari :

14. $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$

15. $f(z) = \frac{1}{1-z^5}$

16. $f(z) = \frac{4-3z}{(1-z)^2}$

17. $f(z) = \frac{1}{(z+3-4i)^2}$

(Nomor 18 sd 26) Tentukan deret taylor dengan pusat diketahui dari fungsi :

18. $f(z) = e^{-z}$; 0

19. $f(z) = e^{2z}$; $2i$

20. $f(z) = \cos z$; $-p/2$

21. $f(z) = 1/z$; -1

22. $f(z) = \frac{1}{1-z}$; $-i$

23. f(z) = sinh (z - 2i) ; 2i

24. $f(z) = z^4 - z^2 + 1$; 1

25. $f(z) = \cos^2 z$; 0

26. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$; z = 0.

---

23. Deret Laurent

Bila fungsi f(z) tidak analitik di $z = z_0$ maka f(z) tidak dapat diperderetkan dalam deret Taylor di $z = z_0$. Agar f(z) dapat diperderetkan di $z = z_0$ maka dilakukan dengan cara membuang titik singular $z = z_0$ dari daerah $| z - z_0 | < R$ sehingga didapatkan daerah $R_1 < | z - z_0 | < R_2$ (cincin / anulus) yang merupakan daerah keanalitikan fungsi f(z). Hal ini telah dilakukan oleh Laurent sebagaimana dijelaskan berikut.

Misal f(z) tidak analitik di $z = z_0$ tetapi analitik pada anulus, $R_1 < | z - z_0 | < R_2$. Maka fungsi f(z) dapat diperderetkan di $z = z_0$ menjadi bentuk deret (**deret Laurent**) sebagai berikut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \ldots\ldots\ldots\ldots (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

dengan $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, n = 0,1,2,…dan $b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$,

n = 1,2,3,… Lintasan C merupakan lintasan tutup sederhana yang terletak di dalam anulus yang melingkupi z_0.

Notasi lain yang biasa digunakan untuk menyatakan bentuk deret Laurent yaitu :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \ldots (R_1 < |z - z_0| < R_2) \, , C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \, ,$$

n = 0, ± 1, ± 2, …

Dalam memperderetkan fungsi ke dalam deret Laurent kita tidak menggunakan rumusan di atas, karena kita ingin menghindari perhitungan integral lintasan. Untuk itu dilakukan dengan menggunakan bantuan deret Taylor maupun deret Mc Laurin yang sudah kita pelajari. Agar lebih jelas diberikan contoh berikut.

Contoh 6

Perderetkan fungsi $f(z) = e^{1/z}$ dengan pusat di z = 0 dan tentukan daerah keanalitikannya.

Jawab :

Fungsi $f(z) = e^{1/z}$ tidak analitik di z = 0. Sehingga fungsi f(z) diperderetkan ke dalam deret Laurent dengan daerah keanalitikan : 0 < | z | < ∞ atau $0 < \left|\frac{1}{z}\right| < \infty$. Maka

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)\, z^n} \quad \ldots\ldots\ldots (0 < |z| < \infty)$$

Contoh 7

Perderetkan $f(z) = \frac{-1}{z^2 - 3z + 2}$ di titik yang diketahui dan tentukan daerah keanalitikannya.

a. z = 1
b. z = 2
c. z = 0

Jawab :

Fungsi $f(z) = \frac{-1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$ tidak analitik di z = 1 dan z = 2. Sehingga deret dengan pusat di kedua titik tersebut merupakan deret Laurent, sedangkan di z = 0 merupakan deret Mc Laurin.

a. Bila f(z) diperderetkan dengan pusat z = 1 maka daerah keanalitikan yang mungkin yaitu :

(i) 0 < | z - 1 | < 1
(ii) 1< | z - 1 |

(i) Daerah 0 < | z - 1 | < 1 (0 < | z - 1 | dan | z - 1 | < 1)

Disini kita tinggal memperderetkan suku kedua dari $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$.

Pada daerah | z - 1 | < 1: $\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -1 \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$

Jadi : $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$ ....$(0 < | z-1 | < 1)$

(ii) Daerah 1 < | z -1 | $\left(\left| \frac{1}{z-1} \right| < 1 \right)$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-1+(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{z-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

Jadi : $f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$ ....$(1 < |z-1|)$

b. Bila f(z) diperderetkan dengan pusat z = 2 maka daerah keanalitikan yang mungkin yaitu :

(iii) 0 < | z - 2 | < 1
(iv)1 < | z - 2 |

(iii) Daerah 0 < | z - 2 | < 1 (0 < | z - 2 | dan | z - 2 | < 1)

Disini kita tinggal memperderetkan suku pertama dari $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$.

Pada daerah | z - 2 | < 1: $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$

Jadi : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n - \frac{1}{z-2}$ ....$(0 < |z-2| < 1)$

(iv) Daerah 1 < | z - 2 | $\left(\left| \frac{1}{z-2} \right| < 1 \right)$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z-2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$$

$$\text{Jadi : } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} - \frac{1}{z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n} \quad \ldots\ldots\ldots(1<|z-2|)$$

c. Bila f(z) diperderetkan dengan pusat z = 0 maka daerah keanalitikan yang mungkin yaitu :

(v) $|z| < 1$
(vi) $1 < |z| < 2$
(vii) $2 < |z|$

(v) Daerah $|z| < 1$

Bila $|z| < 1$ maka $|z| < 2$ atau $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \ldots\ldots(|z|<1) \quad \text{dan}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \ldots.(|z|<2)$$

$$\text{Jadi : } f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots(|z|<1)$$

(vi) Daerah $1 < |z| < 2$ ($1 < |z|$ dan $|z| < 2$)

Pada daerah $1 < |z|$ $\left(\left|\frac{1}{z}\right| < 1\right)$: $\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$

Pada daerah $|z| < 2$ $\left(\left|\frac{z}{2}\right| < 1\right)$: $\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

$$\text{Jadi : } f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots(1<|z|<2)$$

(vii) Daerah $2 < |z|$

Bila $2 < |z| \left(\left| \frac{2}{z} \right| < 1 \right)$ maka $1 < |z| \left(\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \right)$.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad ......(1 < |z|) \; ;$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad ......(2 < |z|)$$

Jadi : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad ....(2 < |z|)$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 4) Perderetkan fungsi berikut pada daerah yang diketahui :

1. $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$; $0 < |z| < 1$
2. $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$; $1 < |z|$
3. $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$; $1 < |z|$
4. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$; $0 < |z - 1| < 2$

(Nomor 5 sd 11) Ekspansikan dalam deret Laurent dengan daerah keanalitikan berbentuk $R_0 < |z| < R_1$ dari fungsi berikut dan tentukan daerah keanalitikannya:

5. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$

6. $f(z) = \dfrac{Sin\ 4z}{z^4}$

7. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$

8. $f(z) = \dfrac{8-2z}{4z-z^3}$

9. f(z) = z cos 1/z

10. $f(z) = \dfrac{e^{-1/z^2}}{z^5}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^6(1+z)^2}$

(Nomor 12 sd 17) Perderetkan dalam deret laurent pada daerah $R_0 < | z - z_0 | < R_1$ dari :

12. $f(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$; $z_0 = 1$

13. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$; $z_0 = i$

14. $f(z) = \dfrac{z^4}{(z+2i)^2}$; $z_0 = -2i$

15. $f(z) = z^2 \sinh 1/z$; $z_0 = 0$

16. $f(z) = \dfrac{\sin z}{\left(z - p/4\right)^3}$; $z_0 = p/4$

17. $f(z) = \dfrac{1}{1-z^4}$; $z_0 = -1$

(Nomor 18 sd 20) Perderetkan $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ pada daerah :

18. $|z| < 1$
19. $|z| > 1$
20. c. $0 < |z - 1| < 2$

(Nomor 21 sd 25) Perderetkan fungsi berikut dengan pusat diketahui :

21. $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$; $z = 0$

22. $f(z) = \dfrac{2}{1 - z^2}$; $z = 1$

23. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$; $z = i$

24. $f(z) = \dfrac{\sinh z}{(z-1)^2}$; $z = 1$

25. $f(z) = \dfrac{z^3 - 2iz^2}{(z-i)^2}$; $z = i$

Daftar Pustaka

1. E. B. Shaff, A. D. Snider, ***Fundamental of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering***, Prentice Hall , Inc, New Jersey, 1976.
2.